>>> Introducción a la Teoría de Valuaciones

Name: Néstor Aponte[†]
Date: June 7, 2024

[†]nhapontea@udistrital.edu.co

>>> § Generalidades

Filtración Sucesión decreciente $\{X_\lambda\}$ de subespacios que descomponen una estructura algebraíca X.

$$\text{Ej: } 3^n\mathbb{Z} \subseteq \cdots 3^2\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$$

!! Induce una topología sobre X

>>> § Generalidades

Filtración Sucesión decreciente $\{X_\lambda\}$ de subespacios que descomponen una estructura algebraíca X.

Ej: $3^n\mathbb{Z} \subseteq \cdots 3^2\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

!! Induce una topología sobre X

Valuación Función que mide el tamaño u orden en mi objeto algebraico X.

Ej: $v(x) := \max\{n \in \mathbb{N} : x \in 3^n\mathbb{Z}\}$

>>> § Generalidades

Seminorma No Arquimediana Inducida por la valuación, formaliza en términos analíticos nuestro deseo de 'medir'.

$$\text{Ej:} \ \|x\| := \epsilon^{v(x)} \qquad \epsilon \in (0,1)$$

[1]Todos los triángulos son isósceles

>>> § Generalidades

Seminorma No Arquimediana Inducida por la valuación, formaliza en términos analíticos nuestro deseo de 'medir'.

Ej: $\|x\| := \epsilon^{v(x)} \qquad \epsilon \in (0,1)$

* $(\neg\forall x \in X)(\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)$ *Seminorma*

[1]Todos los triángulos son isósceles

>>> § Generalidades

Seminorma No Arquimediana Inducida por la valuación, formaliza en términos analíticos nuestro deseo de 'medir'.

$$\text{Ej}: \ \|x\| := \epsilon^{v(x)} \qquad \epsilon \in (0,1)$$

* $(\neg\forall x \in X)(\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)$ *Seminorma*
* $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ *No Arquimediana*[1]

[1] Todos los triángulos son isósceles

>>> § Algunas Propiedades

TOPOLOGÍA	ÁLGEBRA	ANÁLISIS
$\{X_\lambda\}$	$v(x)$	$\|x\|$
Hausdorff	$\bigcap X_\lambda = 0$	!! Norma
$(\forall X_\lambda)(\exists N > 0) : \{x_n - x_m\}_{n,m\geq N} \subseteq X_\lambda$		$\{x_n\} \subseteq X$ Cauchy

* Sea $\mathcal{U} : \mathtt{Comp} \hookrightarrow \mathtt{Filt}$ el funtor olvido que va de los espacios normados completos en los normados. Existe $\mathcal{V} : \mathtt{Filt} \hookrightarrow \mathtt{Comp}$ tal que la pareja $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ son adjuntos.

[2] Límite Proyectivo

>>> § Completación

* Sea $\mathcal{U}$: Comp $\hookrightarrow$ Filt el funtor olvido que va de los espacios normados completos en los normados. Existe $\mathcal{V}$: Filt $\hookrightarrow$ Comp tal que la pareja $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ son adjuntos.

* La completación $\widehat{X}$ de mi espacio $(X, \{X_\lambda\})$ surge precisamente como el objeto universal de ese funtor $\mathcal{V}$

$$\widehat{X} := \lim_{\leftarrow} X/X_\lambda$$ [2]

[2] Límite Proyectivo

>>> § $\mathbb{Z}_p$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}_p \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Figure: Enteros p-ádicos

$$\mathbb{Z}_p \ni a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \quad a_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$$

>>> § Lemma de Hensel

Theorem (Hensel)

Sea A un anillo noetheriano local completo con respecto a su ideal máximal m y $K := A/m$ su campo de residuos. Para cada $f(x) \in A[x]$ mónico sea $\widehat{f}(x) \in K[x]$ su reducción módulo m. Si $\widehat{f}(x) = G(x)H(x)$ para G y H coprimos entonces existen únicos $g(x), h(x) \in A[x]$ mónicos tales que

1. $\deg(g) = \deg(G)$ *y* $\deg(h) = \deg(H)$
2. $f(x) = g(x)h(x)$

>>> § Lemma de Hensel

* El lemma de Hensel es una versión extendida del Método de Newton-Rhapson para la aproximación de raíces. El algoritmo no cambia.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

* Interpretado en p-ádicos, $f(x) \in \mathbb{Z}_p$ tiene solución sii tiene solución en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Requerimos acá

$$x_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : f(x_0) = 0 \ \wedge \ f'(x_0) \neq 0$$

>>> Ejercicio

Determinar la existencia de soluciones $x^2+1=0$ en $\mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} & \qquad & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\ & & \bar{0} \longmapsto \bar{1} \\ \bar{0} \longmapsto \bar{1} & & \bar{1} \longmapsto \bar{2} \\ \bar{1} \longmapsto \bar{2} & & \bar{2} \longmapsto \bar{5} \\ \bar{2} \longmapsto \bar{0} & & \bar{3} \longmapsto \bar{3} \\ \bar{3} \longmapsto \bar{0} & & \bar{4} \longmapsto \bar{3} \\ \bar{4} \longmapsto \bar{2} & & \bar{5} \longmapsto \bar{5} \\ & & \bar{6} \longmapsto \bar{2} \end{array}$$

* $\alpha_0^{(1)} = \bar{2}$ o $\alpha_0^{(2)} = \bar{3}$ son soluciones $\pmod 5$

$$\Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{Z}_5 : (\beta)^2 + 1 = 0$$

* No hay soluciones en $\mathbb{Z}_7$.

>>> Ejercicio

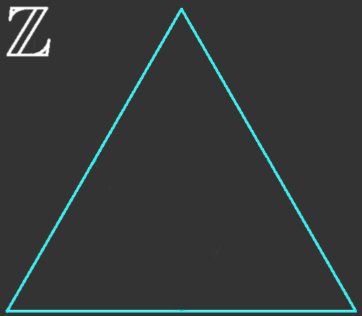
Mejoremos la solución $\alpha_0^{(1)} = 2$, $f'(2) = 4 \neq 0$ por lo que podemos aplicar el algoritmo

Iteración 1 $\alpha_1^{(1)} = 2 - \frac{5}{4} \equiv 2 - 5 \cdot 19 \equiv -93 \equiv 7 \pmod{25}$

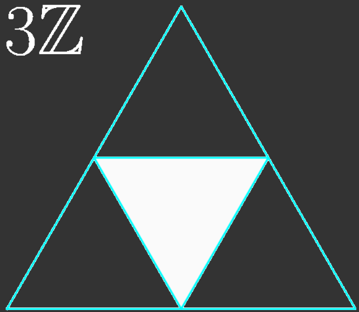
Iteración 2 $\alpha_2^{(1)} = 7 - \frac{50}{14} \equiv 7 - 50 \cdot 9 \equiv 57 \pmod{125}$

$$\beta \approx 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2$$

\>>> § Visualización de $\mathbb{Z}_3$ - Fractales

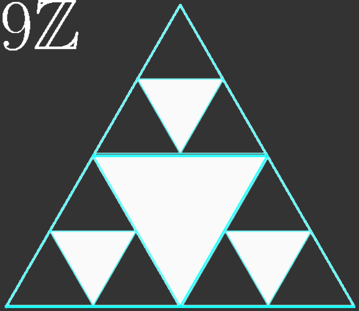


\>>> § Visualización de $\mathbb{Z}_3$ - Fractales

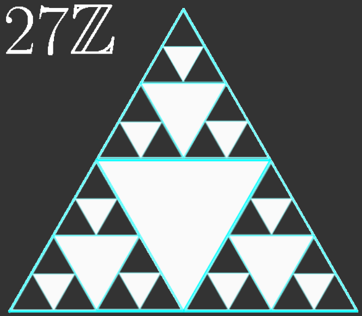


>>> § Visualización de $\mathbb{Z}_3$ - Fractales

$9\mathbb{Z}$



>>> § Visualización de $\mathbb{Z}_3$ - Fractales



>>> § Visualización $\beta \in \mathbb{Z}_5 : (\beta)^2 + 1 = 0$ - Árboles p-ádicos

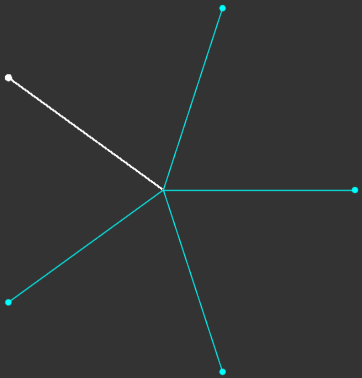


Figure: $\beta \approx 2 \cdot 5^0$

>>> § Visualización $\boldsymbol{\beta \in \mathbb{Z}_5 : (\beta)^2 + 1 = 0}$ - Árboles $\boldsymbol{p}$-ádicos

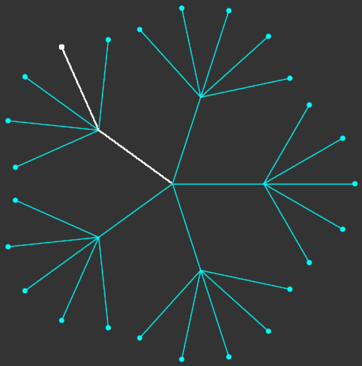


Figure: $\beta \approx 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1$

>>> § Visualización $\beta \in \mathbb{Z}_5 : (\beta)^2 + 1 = 0$ - Árboles p-ádicos

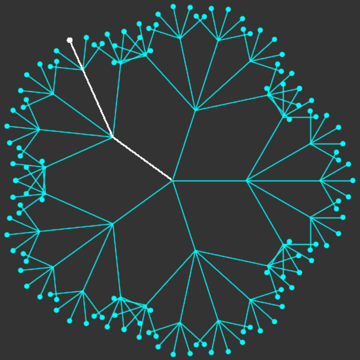


Figure: $\beta \approx 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2$

- Ferreti, Andrea, *Commutative Algebra*, American Mathematical Society, 2023.
- Alain M., Robert, *A course in p-adic analysis*, Springer Science & Business Media, 2013.
- Engler, Antonio J., Prestel, Alexander, *Valued Fields*, Springer Science & Business Media, 2005.
- Atiyah, Michael, *Introduction to commutative algebra*, CRC Press, 2018.
- Katok, Svetlana, *p-adic Analysis Compared with Real*, American Mathematical Society, 2007.